La resistenza effettiva della corda sotto strappo

PIERO VILLAGGIO

PREMESSA

In questo breve articolo mi propongo di dimostrare che il metodo tradizionale per calcolare la resistenza limite di una corda trattenente il volo di un alpinista è inadeguato nel determinare l'effettiva capacità di resistenza della corda. Infatti nel calcolo tradizionale vengono abitualmente trascurati alcuni elementi che concorrono a diminuire sensibilmente il limite di rottura della corda. La considerazione di questi fattori serve a giustificare le discrepanze che spesso si constatano fra le prerogative nominali della corda e i risultati reali. Tali considerazioni mi hanno indotto a studiare il problema dello strappo tenendo conto di nuovi elementi, come la propagazione della forza di tensione sotto forma d'onda da un estremo all'altro della corda, l'influenza del nodo collegante l'estremità della corda all'imbragatura, la riduzione dinamica della tensione di snervamento delle fibre. Questi ingredienti sono introdotti per descrivere con maggior precisione il modello meccanico del fenomeno di strappo.

IL CALCOLO TRADIZIONALE

In tutti i manuali di tecnica d'assicurazione si valuta la tensione massima nella corda mediante un semplice bilancio dell'energia meccanica. Per ragioni di uniformità richiamiamo qui brevemente i simboli e il risultato classico. Indichiamo con H (fig. 1) l'altezza di caduta di un corpo di massa *m* dal punto O ove supponiamo che la corda sia fissata rigidamente. E' noto che questa ipotesi descrive il caso più sfavorevole di caduta in quanto non esistono ancoraggi intermedi che aumentano la lunghezza di corda che, a parità di H, entra in deformazione. In tale ipotesi l'altezza complessiva di caduta sarà 2H e la lunghezza di corda coinvolta nella deformazione sarà H. Nel calcolo tradizionale si determina la tensione di trazione nella corda per effetto della caduta della massa *m* per un tratto 2H semplicemente uguagliando l'energia cinetica del corpo all'energia di deformazione della corda. In formule scriviamo:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} EA \frac{(\Delta H)^2}{H}, \qquad (1)$$

dove v è la velocità del corpo al termine della caduta, E il modulo di elasticità della corda, A l'area della sezione, ΔH l'elongazione. Dalla equazione (1) si ricava facilmente l'elongazione ΔH:

$$\Delta H = v \sqrt{\frac{mH}{EA}},$$

e da questa, sapendo che $v = \sqrt{4gH}$, dove g è l'accelerazione di gravità, si ottiene:

$$\Delta H = 2H \sqrt{\frac{mg}{EA}}. \qquad (2)$$

Si noti che Q = mg rappresenta il peso della massa *m*.
Una volta nota l'elongazione ΔH la corrispondente forza di trazione nella corda è data da

$$N = EA \frac{\Delta H}{H} = 2 \sqrt{QEA}. \qquad (3)$$

Siccome per le corde d'uso corrente (v. per esempio [1]) la quantità EA è determinata e varia da 2500 kg per piccoli carichi a 4000 kg per carichi dell'ordine di grandezza di 2000 kg, è facile ricavare dalla (3) la forza di trazione corrispondente ad un assegnato peso Q. Per esempio, ad un peso Q = 80 kg ed una rigidezza EA = 3000 kg, viene a corrispondere una forza

$$N = 2 \sqrt{80 \times 3000} \cong 980 \text{ kg}.$$

Questo semplice conto ci dimostra che, nell'ambito della teoria di prima approssimazione, anche la caduta più sfavorevole, senza ancoraggi intermedi, dovrebbe essere largamente sostenuta da una corda normale. Infatti i dati sperimentali forniscono una resistenza statica di circa 2100 kg per le corde da 11 mm e circa 1400 kg per quelle da 9 mm.
Tuttavia i risultati della soluzione elementare (3) vanno accettati con riserva. Essi garantiscono il bilancio in media dell'energia, ma non tengono conto delle modalità con cui il carico viene impresso in un fenomeno così evidentemente istantaneo come la caduta.
Cerchiamo dunque di vedere se uno studio un po' più sofisticato del problema dello strappo dia risultati più convincenti.

EFFETTO DELLA PROPAGAZIONE DELLA FORZA

La prima idea è quella di studiare la corda, non come sistema ad un grado di libertà, ma come sistema continuo a partire dall'istante in cui la massa *m* raggiunge il punto B (Fig. 2) ([1]). Questo problema possiede una formulazione matematica precisa che si chiama «equazione delle onde longitudinali di un filo elastico». Le soluzioni dell'equazione delle onde si trovano riportate in tutti i libri di teoria dell'elasticità. In alcuni (cfr. per es. Th. Pöschl) le soluzioni sono state addirittura diagrammate per diversi valori del rapporto *K* fra il peso Q e il peso P = ρgAH del tratto di corda OB, essendo ρ la densità del materiale costituente la corda. Il fatto caratteristico che la soluzione riesce a descrivere è che, non appena la corda entra in trazione, un'onda di tensione si propaga verso l'estremità fissa e di qui viene riflessa nella direzione opposta. Il fenomeno si riproduce nel tempo e, ad ogni istante, la forza di trazione nella corda è data dalla sovrapposizione della tensione diretta e riflessa.

([1]) *Questa possibilità di affrontare il problema è stata già segnalata da Zanantoni.*

L'analisi della soluzione predice pure che la massima tensione durante il moto si produce alla estremità fissa della corda. Invece all'estremo libero B, che è il punto critico di rottura per la presenza del nodo, la massima tensione risulta circa 0,91 volte la massima tensione in O. Siccome per la massima tensione in O si può derivare una formula esplicita (cf. Th. Pöschl, pag. 542), la massima tensione in A è circa 0,91 volte quello in O, cioè

$$N_{max}(A) \cong 0{,}91\ EA \frac{v}{c} \left(\sqrt{\frac{Q}{P}} + 1 \right), \quad (4)$$

dove $c = \frac{E}{\rho}$, e questa espressione di N va sostituita alla (3) nel calcolo della resistenza dinamica.

La (4) si può ulteriormente modificare osservando che

$$EA \frac{v}{c} \sqrt{\frac{Q}{P}} = 2 \sqrt{EAQ}$$

rappresenta la massima tensione calcolata secondo il metodo elementare e quindi possiamo scrivere

$$N_{max}(A) \cong 0{,}91 \times 2 \quad EAQ \left(1 + \sqrt{\frac{P}{Q}}\right). \quad (5)$$

Tanto per illustrare la (5) mediante un esempio numerico, consideriamo la caduta di un corpo Q = 80 kg da un'altezza 2H = 20 m su una corda da 11 mm che presenta una rigidezza EA = 3000 kg.
I dati tecnici relativi alle corde da 11 mm (cf. [1]) indicano

Fig. 1

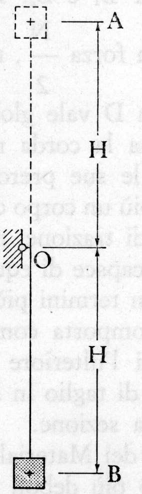

Fig. 2

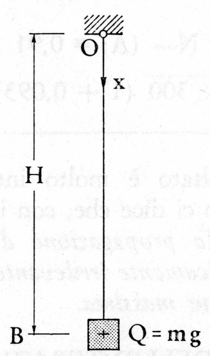

Fig. 3

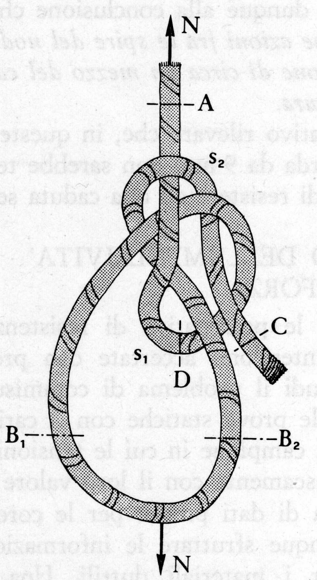

Fig. 4