

# La resistenza effettiva della corda sotto strappo

PIERO VILLAGGIO

## PREMESSA

In questo breve articolo mi propongo di dimostrare che il metodo tradizionale per calcolare la resistenza limite di una corda trattenente il volo di un alpinista è inadeguato nel determinare l'effettiva capacità di resistenza della corda. Infatti nel calcolo tradizionale vengono abitualmente trascurati alcuni elementi che concorrono a diminuire sensibilmente il limite di rottura della corda. La considerazione di questi fattori serve a giustificare le discrepanze che spesso si constatano fra le prerogative nominali della corda e i risultati reali. Tali considerazioni mi hanno indotto a studiare il problema dello strappo tenendo conto di nuovi elementi, come la propagazione della forza di tensione sotto forma d'onda da un estremo all'altro della corda, l'influenza del nodo collegante l'estremità della corda all'imbragatura, la riduzione dinamica della tensione di snervamento delle fibre. Questi ingredienti sono introdotti per descrivere con maggior precisione il modello meccanico del fenomeno di strappo.

## IL CALCOLO TRADIZIONALE

In tutti i manuali di tecnica d'assicurazione si valuta la tensione massima nella corda mediante un semplice bilancio dell'energia meccanica. Per ragioni di uniformità richiamiamo qui brevemente i simboli e il risultato classico. Indichiamo con  $H$  (fig. 1) l'altezza di caduta di un corpo di massa  $m$  dal punto  $O$  ove supponiamo che la corda sia fissata rigidamente. E' noto che questa ipotesi descrive il caso più sfavorevole di caduta in quanto non esistono ancoraggi intermedi che aumentano la lunghezza di corda che, a parità di  $H$ , entra in deformazione. In tale ipotesi l'altezza complessiva di caduta sarà  $2H$  e la lunghezza di corda coinvolta nella deformazione sarà  $H$ . Nel calcolo tradizionale si determina la tensione di trazione nella corda per effetto della caduta della massa  $m$  per un tratto  $2H$  semplicemente uguagliando l'energia cinetica del corpo all'energia di deformazione della corda. In formule scriviamo:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} EA \frac{(\Delta H)^2}{H}, \quad (1)$$

dove  $v$  è la velocità del corpo al termine della caduta,  $E$  il modulo di elasticità della corda,  $A$  l'area della sezione,  $\Delta H$  l'elongazione. Dalla equazione (1) si ricava facilmente l'elongazione  $\Delta H$ :

$$\Delta H = v \sqrt{\frac{mH}{EA}},$$

e da questa, sapendo che  $v = \sqrt{4gH}$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità, si ottiene:

$$\Delta H = 2H \sqrt{\frac{mg}{EA}}. \quad (2)$$

Si noti che  $Q = mg$  rappresenta il peso della massa  $m$ .

Una volta nota l'elongazione  $\Delta H$  la corrispondente forza di trazione nella corda è data da

$$N = EA \frac{\Delta H}{H} = 2 \sqrt{QEA}. \quad (3)$$

Siccome per le corde d'uso corrente (v. per esempio [1]) la quantità  $EA$  è determinata e varia da 2500 kg per piccoli carichi a 4000 kg per carichi dell'ordine di grandezza di 2000 kg, è facile ricavare dalla (3) la forza di trazione corrispondente ad un assegnato peso  $Q$ . Per esempio, ad un peso  $Q = 80$  kg ed una rigidezza  $EA = 3000$  kg, viene a corrispondere una forza

$$N = 2 \sqrt{80 \times 3000} \cong 980 \text{ kg.}$$

Questo semplice conto ci dimostra che, nell'ambito della teoria di prima approssimazione, anche la caduta più sfavorevole, senza ancoraggi intermedi, dovrebbe essere largamente sostenuta da una corda normale. Infatti i dati sperimentali forniscono una resistenza statica di circa 2100 kg per le corde da 11 mm e circa 1400 kg per quelle da 9 mm.

Tuttavia i risultati della soluzione elementare (3) vanno accettati con riserva. Essi garantiscono il bilancio in media dell'energia, ma non tengono conto delle modalità con cui il carico viene impresso in un fenomeno così evidentemente istantaneo come la caduta.

Cerchiamo dunque di vedere se uno studio un po' più sofisticato del problema dello strappo dia risultati più convincenti.

#### EFFETTO DELLA PROPAGAZIONE DELLA FORZA

La prima idea è quella di studiare la corda, non come sistema ad un grado di libertà, ma come sistema continuo a partire dall'istante in cui la massa  $m$  raggiunge il punto B (Fig. 2) <sup>(1)</sup>. Questo problema possiede una formulazione matematica precisa che si chiama «equazione delle onde longitudinali di un filo elastico». Le soluzioni dell'equazione delle onde si trovano riportate in tutti i libri di teoria dell'elasticità. In alcuni (cfr. per es. Th. Pöschl) le soluzioni sono state addirittura diagrammate per diversi valori del rapporto  $K$  fra il peso  $Q$  e il peso  $P = \rho gAH$  del tratto di corda  $OB$ , essendo  $\rho$  la densità del materiale costituente la corda. Il fatto caratteristico che la soluzione riesce a descrivere è che, non appena la corda entra in trazione, un'onda di tensione si propaga verso l'estremità fissa e di qui viene riflessa nella direzione opposta. Il fenomeno si riproduce nel tempo e, ad ogni istante, la forza di trazione nella corda è data dalla sovrapposizione della tensione diretta e riflessa.

<sup>(1)</sup> Questa possibilità di affrontare il problema è stata già segnalata da Zanantoni.

L'analisi della soluzione predice pure che la massima tensione durante il moto si produce alla estremità fissa della corda. Invece all'estremo libero B, che è il punto critico di rottura per la presenza del nodo, la massima tensione risulta circa 0,91 volte la massima tensione in O. Siccome per la massima tensione in O si può derivare una formula esplicita (cf. Th. Pöschl, pag. 542), la massima tensione in A è circa 0,91 volte quello in O, cioè

$$N_{\max}(A) \cong 0,91 EA \frac{v}{c} \left( \sqrt{\frac{Q}{P}} + 1 \right), \quad (4)$$

dove  $c = \frac{E}{\rho}$ , e questa espressione di  $N$  va

sostituita alla (3) nel calcolo della resistenza dinamica.

La (4) si può ulteriormente modificare osservando che

$$EA \frac{v}{c} \sqrt{\frac{Q}{P}} = 2 \sqrt{EAQ}$$

rappresenta la massima tensione calcolata secondo il metodo elementare e quindi possiamo scrivere

$$N_{\max}(A) \cong 0,91 \times 2 \sqrt{EAQ} \left( 1 + \sqrt{\frac{P}{Q}} \right). \quad (5)$$

Tanto per illustrare la (5) mediante un esempio numerico, consideriamo la caduta di un corpo  $Q = 80$  kg da un'altezza  $2H = 20$  m su una corda da 11 mm che presenta una rigidezza  $EA = 3000$  kg.

I dati tecnici relativi alle corde da 11 mm (cf. [1]) indicano

Fig. 1

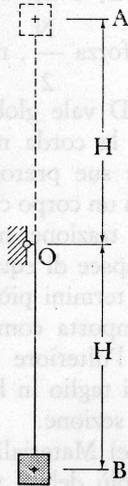


Fig. 2

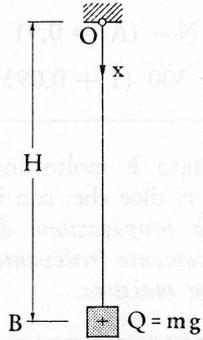


Fig. 3

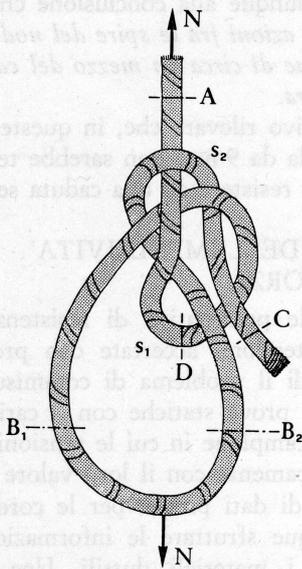
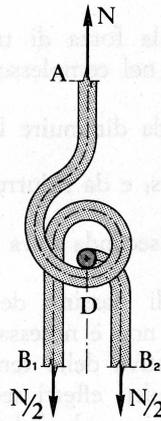


Fig. 4



$$P = \rho AgH = 0,0694 \times 10 = 0,694 \text{ kg.}$$

Quindi, sostituendo questi valori nella (5), ricaviamo

$$N_{\max} (A) \cong 0,91 \times 2 \sqrt{80 \times 300} (1 + 0,093) \cong 970 \text{ kg.}$$

Questo risultato è molto interessante per la pratica. Esso ci dice che, con i materiali in uso, *l'effetto della propagazione degli sforzi lungo l'asse è praticamente irrilevante nella definizione della tensione massima.*

#### EFFETTO DELL'INTERAZIONE FRA LE SPIRE DEL NODO

Supponiamo, per fissare le idee, che all'estremità della corda si sia fatto un anello chiuso mediante un nodo bulino semplice (Fig. 3). Quando una forza  $N$  agisce nella sezione A, l'equilibrio richiede che lungo i due rami costituenti l'anello, per esempio nelle due sezioni  $B_1$  e  $B_2$

la forza sia  $\frac{N}{2}$ . Nel tratto libero, per esempio

nella sezione C, la forza di trazione è nulla. Ciò significa che, nel complesso, le perdite per

attrito sono tali da diminuire la forza  $N$  a  $\frac{N}{2}$

nella prima spira  $s_1$  e da ridurre a zero la forza residua  $\frac{N}{2}$  nella seconda spira  $s_2$ . Tuttavia, per

una valutazione di massima della resistenza limite del sistema, non è necessario conoscere la distribuzione effettiva delle tensioni d'attrito.

Prescindendo da altri effetti secondari come la curvatura delle spire e la riduzione del carico per attrito che il ramo principale subisce nel sottopassaggio della spira  $s_2$ , fissiamo l'attenzione sulla sezione critica D.

Quando il sistema è in tensione, sulla sezione D va a gravare trasversalmente all'asse geometrico la somma delle forze di trazione agenti nei due rami passanti per  $B_1$  e  $B_2$ . Poiché ciascuno di

essi sopporta una forza  $\frac{N}{2}$ , ne consegue che la

forza tagliante in D vale globalmente  $N$ .

In questo schema la corda muta in corrispondenza del nodo le sue prerogative di comportamento. Non è più un corpo che trasmette esclusivamente forze di trazione, ma un sistema parzialmente rigido capace di equilibrare anche una forza di taglio. In termini più grossolani ma intuitivi, essa si comporta come un gancio (Fig. 4). Facciamo poi l'ulteriore ipotesi semplificativa che la forza di taglio in D si ripartisca uniformemente nella sezione.

Dalla Resistenza dei Materiali è ben noto che i corpi sono molto più deboli nei confronti delle tensioni tangenziali che quelle normali. Più precisamente il carico  $N$  che provoca la rottura in D è la metà del carico di rottura a trazione pura. Per esempio, è 1050 kg per una corda da 11 mm e 700 kg per una da 9 mm.

Arriviamo dunque alla conclusione che *l'effetto delle mutue azioni fra le spire del nodo provoca una riduzione di circa un mezzo del carico statico di rottura.*

E' significativo rilevare che, in queste condizioni, una corda da 9 mm non sarebbe teoricamente capace di resistere ad una caduta secca.

#### EFFETTO DELL'IMPULSIVITA' DEGLI SFORZI

In genere le prerogative di resistenza di una corda si intendono accertate con prove lente. Nasce quindi il problema di commisurare i risultati delle prove statiche con il carico di rottura di un campione in cui le tensioni sono impresse bruscamente con il loro valore finale.

In assenza di dati precisi per le corde, possiamo comunque sfruttare le informazioni che si hanno per i materiali duttili. Una proprietà fenomenologica abbastanza comune per questi

materiali è che il carico di rottura tende a crescere con la velocità d'impartimento ad un valore che si aggira fra  $1,2 \div 1,3$  del carico statico.

Il fatto che il carico di caduta si applichi bruscamente costituisce dunque un elemento favorevole nei confronti della previsione della resistenza limite a partire dal carico limite statico. Per esempio, nel caso di una caduta su una corda da 9 mm il carico di rottura di 700 kg può essere sostituito con un valore di  $840 \div 910$  kg.

### CONCLUSIONI

Dall'analisi svolta si possono dedurre le seguenti conclusioni schematiche:

Effetto considerato	propagazione d'onda di tensione	→ irrilevante,
	strizione fra spire in corrispondenza del nodo	→ riduzione di circa a metà del carico di rottura,
	impulsività della tensione	→ aumento del $20 \div 30\%$ del carico di rottura statico

Preciudendo da altri effetti di rilievo come, per esempio, l'invecchiamento e l'usura della corda, i risultati che precedono permettono di confermare un fatto sperimentale di verifica sistematica, cioè che nei confronti di un volo secco una corda da 11 mm è impegnata all'80%

della sua resistenza ( $\sim \frac{980}{1,2 \times 1050}$ ) e una corda da 9 mm al limite di rottura.

PIERO VILLAGGIO  
(C.A.A.I. e Sezione di Udine)

### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- EDELRID (Ed.), *Die Seilkunde*, 1971.  
ZANANTONI, C., «E' pericoloso arrampicare con due corde sottili?». R.M. 9, 413-424 (1968).  
PÖSCHL, Th., *Der Stöss*, in «Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1928.  
MARTIN, J. B., *Plasticity*. M.I.T. Press, Cambridge Mass. (1975).

